Rozwiązanie:

Punktem wyjściowym tych zadań są z jednej strony równania fizyczne a z drugiej relacje łączące wielkości globalne (moment zginający M z krzywizną pręta κ).

a) W **zadaniu liniowo sprężystym** zachodzą warunki

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{11} = \kappa\, x_3\,, \quad \kappa = \frac{M}{EJ_2}, \quad J_2 = \int_F (x_3)^2 dF$$

stąd rozkład naprężeń w przekroju pręta ma postać (rys. 1.13b)

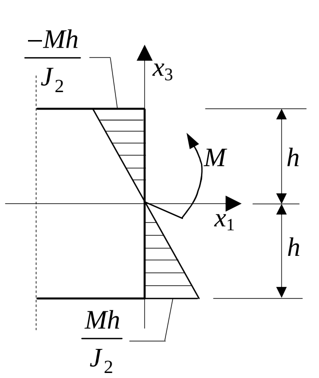
$$\sigma_{11} = E\kappa\, x_3 = \frac{EM}{EJ_2} x_3 \rightarrow \sigma_{11} = \frac{Mx_3}{J_2}$$

b) W **nieliniowo sprężystym przypadku** otrzymamy

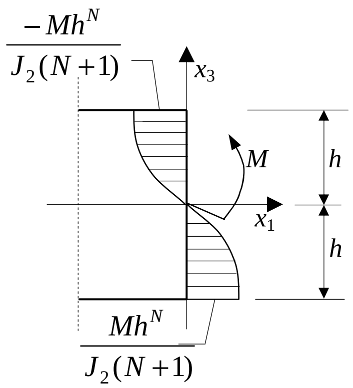
$$\sigma_{11} = A(\varepsilon_{11})^N, \quad \varepsilon_{11} = \kappa x_3, \quad \kappa = \left(\frac{M}{AJ_2(N+1)}\right)^n, \quad J_2(N+1) = \int_F (x_3)^{N+1} dF$$

stąd rozkład naprężeń w przekroju pręta ma postać (rys. 1.13c)

$$\sigma_{11} = A(\kappa\, x_3)^N = \frac{AM}{AJ_2(N+1)}(x_3)^N \rightarrow \sigma_{11} = \frac{M(x_3)^N}{J_2(N+1)}$$



Rys. 1.13b



Rys. 1.13c

c) W **zadaniu liniowo lepkosprężystym** będzie

$$\sigma_{11} = E * d\varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{11} = \kappa\, x_3, \quad J_2 E * d\kappa = M$$

stąd rozkład naprężeń w przekroju pręta ma postać

$$\sigma_{11} = E * d\left(\kappa\, x_3\right) = \frac{M x_3 E}{J_2} * E^{-1} \rightarrow \sigma_{11} = \frac{M}{J_2} x_3$$

d) W **zadaniu nieliniowo lepkosprężystym** zachodzi

$$\sigma_{11} = {\varepsilon_{11}}^{N} * dA, \quad \varepsilon_{11} = \kappa x_3, \quad M = J_2 (N+1) \kappa^{N} * dA$$

stąd rozkład naprężeń w przekroju pręta ma postać

$$\sigma_{11} = {x_3}^{N} \kappa^{N} * dA = {x_3}^{N} \frac{M}{J_2 (N+1)} dA^{-1} * dA \rightarrow \sigma_{11} = \frac{M \left(x_3\right)^{N}}{J_2 (N+1)}$$

Ze wzorów powyższych wynika podobieństwo rozkładów naprężeń w zadaniach sprężystych i lepkosprężystych. Wyznaczymy jeszcze bezwymiarowy stosunek naprężeń wywołanych tym samym momentem w zadaniach liniowych i nieliniowych

$$\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11}^{N}} = \frac{M x_3}{J_2} \cdot \frac{J_2 (N+1)}{M {x_3}^{N}} = \frac{J_2 (N+1)}{J_2} {x_3}^{(1-N)}$$

e) Dla **przyrostów** naprężeń $\Delta\sigma$, odkształceń $\Delta\varepsilon$, krzywizny $\Delta\kappa$ i momentów ΔM zachodzą związki

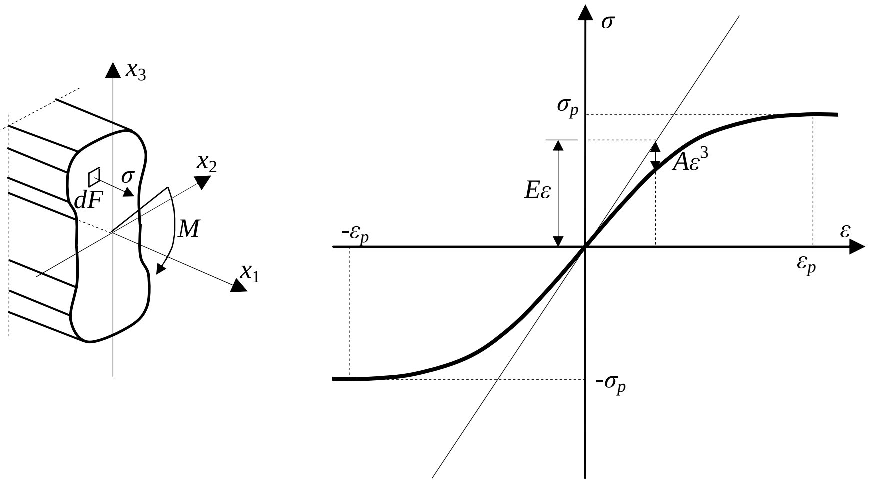
$$\Delta\sigma = E(\varepsilon)\Delta\varepsilon, \quad \Delta\varepsilon = \Delta\kappa\, x_3, \quad \Delta\kappa = \frac{\Delta M}{J_2 E(\varepsilon)}$$

stąd rozkład przyrostów naprężeń w przekroju pręta ma postać

$$\Delta\sigma_{11} = E(\varepsilon)\Delta\kappa \quad x_3 = \frac{E(\varepsilon)\Delta M}{E(\varepsilon) J_2} x_3 \rightarrow \Delta\sigma_{11} = \frac{\Delta M\ x_3}{J_2}$$

ZADANIE 1.14.

Należy wyznaczyć przebiegi naprężeń normalnych w przekroju zginanego pręta o dwóch osiach symetrii. Pręt wykonano z materiału nieliniowo sprężystego opisanego równaniem fizycznym $\sigma = E\varepsilon - A\varepsilon^3$



Rys. 1.14

Rozwiązanie:

W pierwszej kolejności wyznaczymy stałą materiałową A z warunku, aby styczna do wykresu $(\varepsilon - \sigma)$ w punkcie $(\sigma_p, \varepsilon_p)$ była pozioma

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_p} = E - 3A\varepsilon_p^{\ 2} = 0 \rightarrow \varepsilon_p = \left(\frac{E}{3A}\right)^{1/2} \rightarrow A = \left(\frac{E}{3\varepsilon_p^{\ 2}}\right)$$

Podstawiając

$$\varepsilon = \varepsilon_p = \left(\frac{E}{3A}\right)^{1/2}$$

do równania wyjściowego otrzymamy

$$\sigma_p = \frac{2}{3}\left(\frac{E}{3A}\right)^{1/2} \rightarrow A = \frac{4}{27}\frac{E}{\sigma_p^{\ 2}}$$

Otrzymaliśmy tu dwie zależności łączące $(\varepsilon_p, \sigma_p)$ z parametrem A.

Wyznaczymy teraz zależność moment - krzywizna $M \sim \kappa$ dla analizowanych równań fizycznych. Naprężenie w przekroju wyrażone przez krzywiznę przedstawia się tu równaniem

$$\sigma = E\kappa x_3 - A(\kappa x_3)^3$$

Warunek równowagi rzutu sił na oś x_1 prowadzi do relacji

$$N = \int_F \sigma \, dF = 0 \rightarrow E\kappa \int_F x_3 \, dF - A\kappa^3 \int_F x_3^{\,3} \, dF = 0 \;\rightarrow\; E\kappa S_2 - A\kappa^3 S_{2(3)} = 0$$

gdzie

$$S_2 = \int_F x_3 dF, \;\; S_{2(3)} = \int_F x_3^{\,3} dF$$

Warunek ten będzie spełniony tożsamościowo $(S_2 = S_{2(3)} = 0)$ w układzie osi (x_2, x_3) pokrywających się z osiami symetrii przekroju. Warunek równowagi sumy momentów na oś x_2 prowadzi do relacji

$$M = \int_F \sigma x_3 dF = 0 \rightarrow E\kappa \int_F x_3^{\,2} dF - A\kappa^3 \int_F x_3^{\,4} dF = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow M = E\kappa J_2 - A\kappa^4 J_{2(4)}$$

gdzie

$$J_2 = \int_F x_3^{\,2} dF, \quad J_{2(4)} = \int_F x_3^{\,4} dF$$

Znając moment M należy wyznaczyć krzywiznę κ i naprężenie σ z układu równań

$$\sigma = E\kappa x_3 - A(\kappa x_3)^3 \quad \text{i} \quad M = J_2 E\kappa - J_{2(4)} A\kappa^3$$

W pierwszej kolejności obliczymy $E\kappa$ i $A\kappa^3$

$$E\kappa = \frac{M x_3^{\,3} - \sigma J_{2(4)}}{x_3^{\,3} J_2 - x_3 J_{2(4)}}, \qquad A\kappa^3 = \frac{M x_3 - \sigma J_2}{x_3^{\,3} J_2 - x_3 J_{2(4)}}$$

Przyrównując do siebie wartości krzywizny κ wyliczone z tych równań otrzymamy poszukiwaną zależność

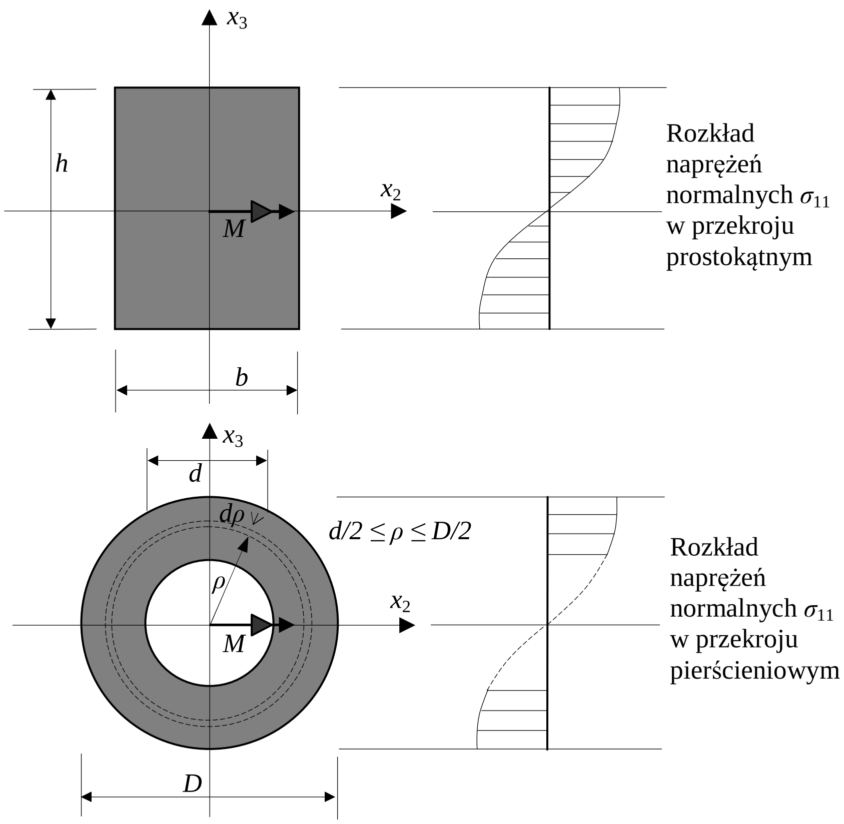
$$M x_3 - \sigma J_2 = \frac{\left(M x_3^{\,3} - \sigma J_{2(4)}\right)^3}{\left[x_3\left(x_3^2 J_2 - J_{2(4)}\right)\right]^2} \frac{A}{E^3}$$

Z zależności tej dla znanej wartości momentu M, stałych materiałowych oraz współrzędnej włókna w przekroju możemy wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych σ.

ZADANIE 1.15.

Należy wyznaczyć rozkłady naprężeń normalnych σ_{11} w przekroju pręta poddanego działaniu momentu zginającego. Rozważania należy przeprowadzić dla pręta o przekroju prostokątnym $b \times h$ oraz dla rury o średnicy wewnętrznej d i zewnętrznej D (rys. 1.15a). Materiał, z którego wykonano pręt jest nieliniowo sprężysty opisany równaniem fizycznym $\sigma_{11}=A\varepsilon_{11}{}^{N}$

Należy przeanalizować także przypadek szczególny liniowo sprężysty dla $N=1$.



Rys. 1.15a

Rozwiązanie:

Rozkład naprężeń normalnych σ_{11} w zginanym pręcie określa równanie

$$\sigma_{11}=\frac{M}{J_2(N+1)}x_3{}^N$$

gdzie

$$J_2(N+1)=\int_F x_3{}^{N+1}dF$$

Zaś w przypadku liniowo sprężystym $(n=1)$ rozkład naprężeń normalnych upraszcza się do postaci

$$\sigma_{11}=\frac{M}{J_2}x_3$$

gdzie

$$J_2=\int_F x_3{}^2dF$$

Obliczymy obecnie wartości momentów bezwładności rzędu $(N+1)$. W przypadku przekroju prostokątnego zachodzi

$$J_2(N+1)=2b\int_0^{h/2} x_3{}^{N+1}dx_3=\alpha_1 b(h)^{N+2},$$

$$\alpha_1=2^{-2-N}\frac{n}{2n+1}$$

a w przypadku rury

$$J_2(N+1)=4\int_0^{D/2}\left[x_3^{1+N}\left(\frac{D^2}{4}-x_3^2\right)\right]dy-4\int_0^{d/2}\left[x_3^{1+N}\left(\frac{d^2}{4}-x_3^2\right)\right]dy$$

Po podstawieniu nowych zmiennych

$$\beta_1=\frac{2x_3}{D},\ \ \beta_2=\frac{2x_3}{d}$$

wyliczymy poszukiwaną całkę

$$J_{22}(N+1)=2^{-1-N}D^{N+3}\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^{N+3}\right]I,$$

gdzie

$$I=\int_0^1\sqrt{1-\beta^2}\,\beta^{N+1}d\beta$$

Całkę I obliczymy podstawiając

$$\beta^2=n\rightarrow d\beta=\frac{1}{2}n^{-1/2}dn$$

czyli

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1(1-n)^{1/2}n^{1/2n}dn$$

Jest to całka Eulera I – rodzaju. Całkę tą można przedstawić w postaci kombinacji Γ - funkcji

$$I=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{3}{2}\right)}$$

a po dalszych przeliczeniach otrzymamy

$$I=\frac{n}{3n+1}2^N\left[\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)\right]^2\left[\Gamma(2+N)\right]^{-1}$$

Ostatecznie moment bezwładności rury wynosi

$$J_2(N+1)=\alpha_2D^{N+3}\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^{N+3}\right]$$

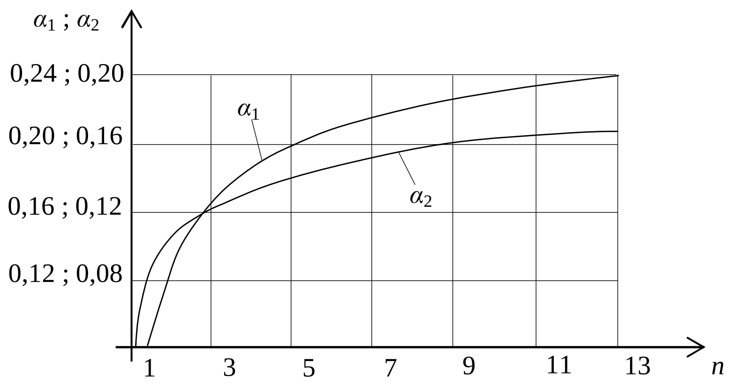
gdzie

$$\alpha_2=\frac{n}{2(3n+1)}\left[\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)\right]^2\left[\Gamma(2+N)\right]^{-1}$$

W przypadku szczególnym, pełnego przekroju kołowego $(d=0)$ otrzymamy

$$J_{22}(N+1)=\alpha_2 D^{N+3}$$

Wykresy zależności $\alpha_1(n)$ i $\alpha_2(n)$ przedstawiono na rys. 1.15b



Rys. 1.15b

Ostatecznie rozkład naprężeń w przekroju prostokątnym $b\times h$ określa wzór

$$\sigma_{11}=\frac{M}{\alpha_1 bh^{N+2}}x_3^{\,N} \quad , \quad \alpha_1=2^{-1-N}\frac{n}{2n+1}$$

Natomiast w przypadku liniowo sprężystym $(n=1)$ zachodzi

$$\sigma_{11}=\frac{12M}{bh^3}x_3 \quad , \quad \alpha_1=\frac{1}{12}$$

Z porównania rozkładów naprężeń w przypadku nieliniowym i liniowym wynika możliwość szacowania różnicy stanów naprężeń w zadaniach liniowych i nieliniowych.

$$\frac{\sigma_{11(n)}}{\sigma_{11(n=1)}}=\frac{1}{12\alpha_1}\left(\frac{x_3}{h}\right)^{N-1}$$

Rozkład naprężeń w przekroju rurowym ma postać

$$\sigma_{11} = \frac{M}{\alpha_2 D^{N+3}\left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^{N+3}\right)} (x_3)^N$$

gdzie

$$\alpha_2 = \frac{n}{2(3n+1)}\left[\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)\right]^2 [\Gamma(2+N)]^{-1}$$

Natomiast wartość momentu bezwładności J_2 dla przekroju rurowego w zadaniu liniowym obliczymy w sposób odmienny przez porównanie momentów bezwładności J_2 i J_3 z biegunowym momentem bezwładności J_0. Zachodzi

$$J_2 = \int_F x_3^2 dF, \quad J_3 = \int_F x_2^2 dF, \quad J_0 = J_2 + J_3 = \int_F \left(x_3^2 + x_2^2\right) dF$$

Wyznaczymy teraz biegunowy moment bezwładności J_0 wprowadzając nową zmienną

$$\rho^2 = x_2^2 + x_3^2, \quad dF = 2\pi\rho\, d\rho$$

zamieniając wówczas całkę podwójną na pojedynczą

$$J_0 = \int_{d/2}^{D/2} \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_{d/2}^{D/2} = \frac{\pi}{2}\left[\left(\frac{D}{2}\right)^4 - \left(\frac{d}{2}\right)^4\right]$$

Z uwagi na symetrię przekroju otrzymamy

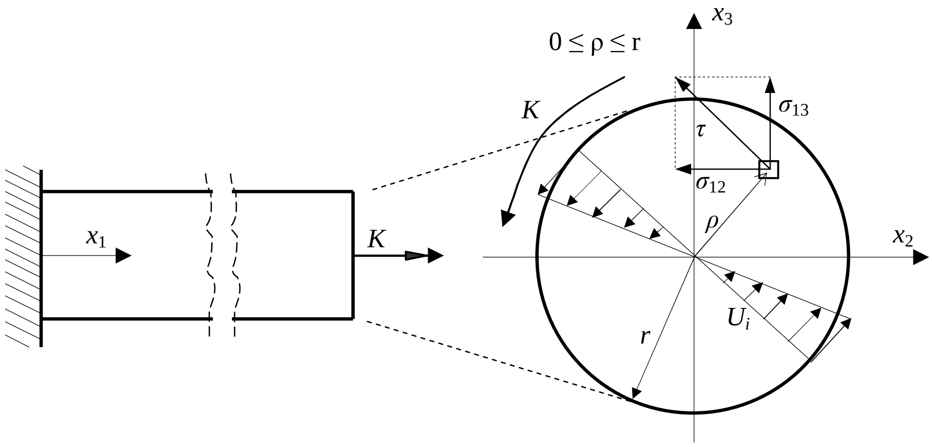
$$J_2 = J_3 = \frac{J_0}{2} \to J_2 = \frac{\pi}{4}\left[\left(\frac{D}{2}\right)^4 - \left(\frac{d}{2}\right)^4\right]$$

Ostatecznie naprężenie σ_{11} obliczymy z wzoru

$$\sigma_{11} = \frac{4M}{\pi}\left[\left(\frac{D}{2}\right)^4 - \left(\frac{d}{2}\right)^4\right]^{-1} x_3$$

ZADANIE 1.16.

Należy określić rozkłady naprężeń tnących w skręcanym momentem M pręcie kołowym o promieniu r (rys. 1.16), wykonanym z nieliniowego materiału sprężystego o równaniu fizycznym $\sigma_{(i)} = A\varepsilon_{(i)}{}^{N}$, gdzie



Rys. 1.16

$$\sigma_{(i)} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}\,,\ S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}\,,$$

$$\varepsilon_{(i)} = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}\,,\ e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\,.$$

W powyższych wzorach symbole $\sigma_{(i)}$ i $\varepsilon_{(i)}$ są intensywnościami naprężeń i odkształceń, a S_{ij} i e_{ij} - dewiatorami naprężeń i odkształceń.

Rozwiązanie:

Pole przemieszczeń przyjmiemy w postaci

$$u_1 = 0,\ \ u_2 = -2\alpha x_1 x_3 0,\ \ u_3 = 2\alpha x_1 x_2$$

Odkształcenia

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$$

wynoszą

$$\varepsilon_1 = \alpha x_2,\quad \varepsilon_{12} = -\alpha x_3,\quad \varepsilon_{23} = 0,\quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0 \rightarrow \varepsilon_{ii} = 0 \rightarrow \varepsilon_{ij} = e_{ij}$$

Wynika stąd, iż w tym przypadku wobec $\varepsilon_{ii} = 0$ tensor odkształceń pokrywa się z dewiatorem odkształceń. Natomiast intensywność odkształceń $\varepsilon_{(i)}$, która występuje w równaniu fizycznym obliczymy z zależności

$$\varepsilon_{(i)}{}^2 = \frac{2}{3}\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right)\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right)$$

stąd

$$\varepsilon_{(i)} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + 6\left(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2\right)}$$

W naszym przypadku $\varepsilon_{(i)}$ wynosi

$$\varepsilon_{(i)} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{6\left(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2\right)} = \frac{\sqrt{12}}{3}\alpha\sqrt{x_2{}^2 + x_3{}^2} = \frac{\sqrt{12}}{3}\rho\alpha$$

Znając intensywność odkształceń $\varepsilon_{(i)}$ wyznaczymy z równania fizycznego intensywność naprężeń $\sigma_{(i)}$

$$\sigma_{(i)}{}^2 = \frac{3}{2}\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right)\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right)$$

stąd

$$\sigma_{(i)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2\right)}$$

W naszym zadaniu występuje jedynie σ_{12} i σ_{13} stąd

$$\sigma_{(i)} = \sqrt{3}\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2} = \sqrt{3}\tau$$

gdzie

$$\tau = \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}$$

Z równań fizycznych otrzymujemy wzór na naprężenie styczne τ

$$\sigma_{(i)} = A\varepsilon_{(i)}{}^N \to \sqrt{3}\tau = A\left(\frac{\sqrt{12}}{3}\rho\alpha\right)^N \to \tau = B(\rho\alpha)^N$$

gdzie

$$B = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{12}}{3}\right)^N A$$

Znając naprężenie τ można określić moment skręcający K

$$K = \int_F \tau\rho dF = \int_0^r \tau\rho 2\pi\rho d\rho = \int_0^r B(\rho\alpha)^N \rho 2\pi\rho d\rho =$$

$$= B\alpha^N \int_0^r \rho^{N+2} 2\pi d\rho = 2\pi B\alpha^N \frac{r^{N+3}}{N+3} = B\alpha^N J_0(N+1)$$

Z zależności tej wyznaczymy nieznany parametr α

$$\alpha^N = \frac{(N+3)K}{2\pi B r^{N+3}}$$

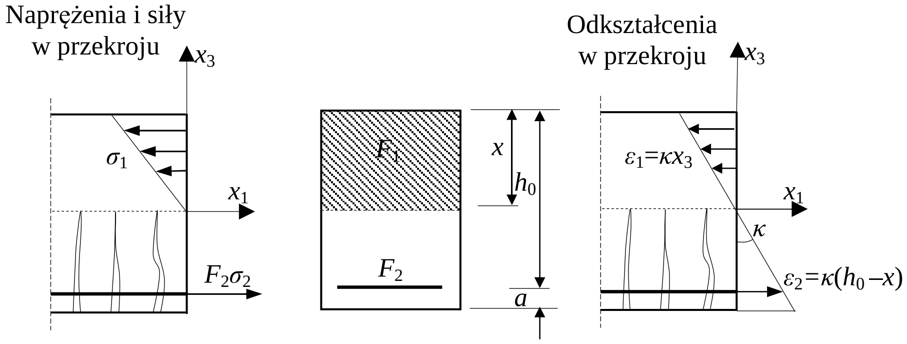
Ostatecznie poszukiwany rozkład naprężeń tnących w nieliniowo sprężystym pręcie ma postać

$$\tau = (N+3)\left(2\pi r^{N+3}\right)^{-1} K\rho^N = \frac{K}{J_0(N+1)}\rho^N$$

Naprężenie to przyjmie największą wartość w skrajnych włóknach $\rho = r$.

ZADANIE 1.17.

Analizować będziemy własności stanów naprężeń w zginanym pręcie wykonanym z lepkosprężystej matrycy o polu przekroju części ściskanej F_1 i funkcji relaksacji $E_1(t)$ zbrojonej sprężystymi prętami o polu przekroju F_2 i module sprężystości E_2 (rys. 1.17a). Pręty te wzmacniają głównie strefę rozciąganą nieodpornego na ciągnienie kompozytu, w której pojawiły się rysy. Z sytuacją taką spotykamy się zarówno w analizie konstrukcji żelbetowych jak i kompozytów z plastyków wzmacnianych przypowierzchniowo.



Rys. 1.17a

Rozwiązanie:

a) Składnik pierwszy (matryca) jest ciałem lepkosprężystym, a drugi (zbrojenie) - sprężystym. Całość będzie posiadała cechy lepkosprężyste i jest jednokrotnie wewnętrznie statycznie niewyznaczalna. Określimy teraz zależność moment zginający - krzywizna z zależności geometrycznych

$$\varepsilon_1 = \kappa x_3, \quad \varepsilon_2 = \kappa(h_0 - x) \qquad\qquad x = \text{const}$$

fizycznych

$$\sigma_1 = E_1(t) * d\varepsilon_1, \quad \sigma_2 = E_2\varepsilon_3 = E_2H(t) * d\varepsilon_2$$

wyrażeń na momenty zginające w matrycy

$$M_1 = \int_{F_1} \sigma_1 x_3 dF_1 = \int_{F_1} E_1(t) * d\kappa x_3^{\,2} dF_1 = J_1 E_1(t) * d\kappa$$

oraz w zbrojeniu

$$M_2 = \sigma_2 F_2(h_0 - x) = E_2 F_2(h_0 - x)^2 H(t) * d\kappa$$

Stąd

$$M = M_1 + M_2 = \left[J_1 E_1(t) + E_2 F_2 (h_0 - x)^2 H(t)\right] * d\kappa$$

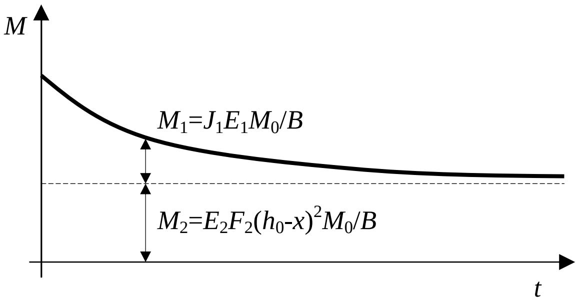
b) Zauważmy, że zmiany momentu M jako kombinacje funkcji $E(t)$ (rys. 1.17b) postaci

$$M(t) = \frac{M_0}{B}\left[J_1 E_1(t) + E_2 F_2 (h_0 - x)^2\right]$$

spowodują, iż krzywizna będzie stała

$$\frac{M_0}{B}\left[J_1 E_1 + E_2 F_2 (h_0 - x)^2\right] = \left[J_1 E_1 + E_2 F_2 (h_0 - x)^2\right] * d\kappa \rightarrow$$

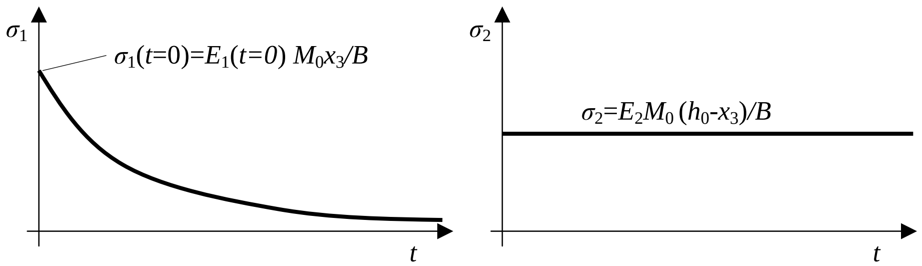
$$\rightarrow M_0 = B\kappa \rightarrow \kappa = \frac{M_0}{B} H(t)$$



Rys. 1.17b

Wynik ten oznacza, iż stałe deformacje otrzymamy przy malejącej w czasie wartości momentu. Wówczas naprężenia w matrycy będą maleć

$$\sigma_1 = E_1(t) * d\kappa x_3 = \frac{M_0 x_3}{B} E_1(t) * dH = \frac{M_0 x_3}{B} E_1(t)$$



Rys. 1.17c

zaś w zbrojeniu sprężystym będą stałe (rys. 1.17c)

$$\sigma_2 = E_2 H(t) * d\kappa(h_0 - x) = \frac{E_2 M_0}{B}(h_0 - x) H(t) * dH = \frac{E_0 M_0}{B}(h_0 - x) H(t)$$

c) Wyznaczymy z kolei relację między krzywizną κ, a momentami cząstkowymi M_1 i M_2, korzystając, z odwrotnych równań fizycznych

$$\varepsilon_1 = C_1(t) * d\sigma_1 \quad \text{i} \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E_2}\sigma_2 = G_2 H(t) * d\sigma_2$$

Podstawiając do nich równania geometryczne oraz całkując elementarne momenty uzyskamy wzory na krzywizny

$$\int_{F_1} \kappa x_3{}^2 dF = \int_{F_1} C_1(t) * d\sigma_1 x_3 dF_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \kappa J_1 = C_1(t) * dM_1 \rightarrow \kappa = \frac{1}{J_1} C_1(t) * dM_1$$

oraz

$$\varepsilon_2 = \kappa(h_0 - x), \quad \kappa'(h_0 - x)^2 F_2 = \frac{1}{E_2}\sigma_2 (h_0 - x) F_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \kappa'(h_0 - x)^2 = \frac{1}{F_2 E_2} M_2 \rightarrow \kappa' = \frac{1}{F_2 (h_0 - x)^2} G_2 H(t) * dM_2$$

Przyrównując do siebie krzywizny $\kappa = \kappa`$ otrzymamy zależność

$$\frac{1}{J_1} C_1(t) * dM_1 = \frac{1}{F_2 (h_0 - x)^2} G_2 H(t) * dM_2$$

Moment zginający M jest sumą momentów cząstkowych $M = M_1 + M_2$, stąd rozdział momentów otrzymamy z rozwiązania układów równań całkowych

$$\frac{1}{J_1} C_1(t) * dM_1 - \left[F_2 (h_0 - x)^2\right]^{-1} G_2 H(t) * dM_2 = 0$$

$$\text{i} \quad M_1(t) + M_2(t) = M(t)$$

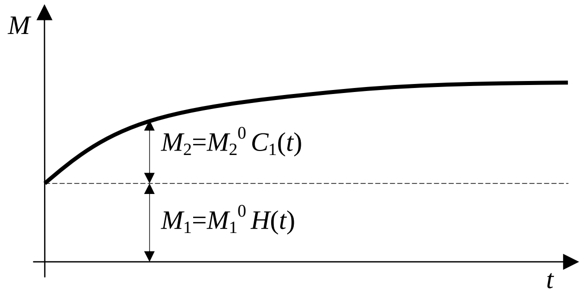
z którego dla znanego zewnętrznego momentu zginającego M należy wyliczyć M_1 i M_2.

d) Zauważmy, iż zmianom $M_2 = M_2^0 C_1(t)$ w zbrojeniu towarzyszy

$$\frac{1}{J_1} C_1(t) * dM_1 - \left[F_2 (h_0 - x)^2\right]^{-1} G_2 M_2^0 C_1(t) * dH(t) = 0$$

stąd

$$\frac{1}{J_1} M_1(t) = \left[F_2 (h_0 - x)^2\right]^{-1} G_2 M_2^0 H(t) \rightarrow M_1(t) = M_1^0 H(t)$$



Rys. 1.17d

Wynika więc, iż moment M_1 musi być stały w czasie, a sumaryczny moment ma postać

$$M(t) = M_1^0 H(t) + M_2^0 C_1(t)$$

w której stałe M_1^0 i M_2^0 powiązane są relacją

$$M_1^0 = J_1 \left[F_2 (h_0 - x)^2\right]^{-1} G_2 M_2^0$$

Przeanalizowaliśmy tu drugi szczególny proces, w którym naprężenia w matrycy są stałe (por. poprzednie przykłady), natomiast naprężenia w zbrojeniu narastają zgodnie z zależnością $\sigma_2 = \sigma_2^0 C_1(t)$, analogiczną do funkcji pełzania matrycy.

e) Badaliśmy tutaj dwa szczególne procesy reologiczne w pręcie lepkosprężystym wzmocnionym zbrojeniem. W pierwszym przypadku było stałe naprężenie w zbrojeniu, zaś w drugim - w matrycy. Natomiast moment zewnętrzny M był malejący lub rosnący. W przypadku stałego momentu zewnętrznego należy rozwiązać układ równań z punktu c).

Podane w tym zadaniu rozumowanie po uzupełnieniach może posłużyć do określania stanów naprężeń w zginanych belkach żelbetowych, w których dochodzi do redystrybucji naprężeń w zbrojeniu i betonie. Przykładowo, stałej wartości momentu w przekroju towarzyszy wzrost z upływem czasu naprężeń w zbrojeniu oraz ich spadek w betonie.

ZADANIE 1.18.

W liniowej lepkosprężystości o równaniu fizycznym $\sigma = E * d\varepsilon$ zależność momentu zginającego *M* od krzywizny ma postać

$$M = JE(t) * d\kappa$$

Należy znaleźć relację odwrotną tj. wyrażenie określające krzywiznę w zależności od momentu.

Rozwiązanie:

a) Z równań fizycznych $\varepsilon = E^{-1}(t) * d\sigma$ po podstawieniu równań geometrycznych $\varepsilon = \kappa x_3$ i uwzględnieniu warunków równań wewnętrznych

$$M = \int_F \sigma x_3 dF$$

otrzymamy

$$\int_F \kappa x_3 x_3 dF = \int_F E^{-1}(t) * d\sigma x_3 dF \to \kappa \int_F x_3{}^2 dF = dE^{-1}(t) * \int_F \sigma x_3 dF \to$$

$$\to \kappa = \frac{1}{J_{22}} M * dE^{-1}(t) \quad \text{gdzie} \quad E * dE^{-1} = H$$

Jest to poszukiwana zależność krzywizny od momentu.

b) Jeżeli teraz postawimy pytanie jak powinno się zmieniać obciążenie $P(t)$, a tym samym moment $M(t) - M_0(t)$, aby przemieszczenia belki były $u = u_0 g(t)$, gdzie $u_0 g(t)$ jest dane, to odpowiedź wynika ze stwierdzenia, że dla

$$u_0 g(t) \to x_3 \kappa = u \to \kappa = \kappa_0 g(t)$$

stąd

$$M(t) = JE(t) * d\,\kappa = J\kappa_0 E(t) * dg$$

zaś

$$M(t) = \sum_\alpha a^\alpha P_f^\alpha(t)$$

stąd

$$\sum_{\alpha} a^{\alpha} P^{\alpha} f(t) = J\, \kappa_0 E * dg \quad \to \quad f(t) = AE(t) * dg$$

ZADANIE 1.19.

Zależności między siłą osiową w pręcie N, a jego wydłużeniem λ mają postać

$$\lambda = \varepsilon\, l = N * dE^{-1}(t) \frac{l}{F}$$

Należy znaleźć relację odwrotną tj. wyrazić siłę osiową N przez wydłużenie

Rozwiązanie:
Wzór na wydłużenie otrzymano z równania fizycznego

$$\varepsilon = \sigma * dE^{-1}(t) = \frac{1}{F} N * dE^{-1}(t) \to \varepsilon\, l = \frac{l}{F} N * dE^{-1}(t)$$

Z punktu widzenia matematycznego mamy do czynienia z równaniem całkowym, którego rozwiązania czyli funkcji podcałkowej poszukujemy.
Rozważmy teraz odwrotne do pierwszego równania fizycznego

$$\sigma = \varepsilon * dE(t)$$

które jest poszukiwanym rozwiązaniem pierwszego równania fizycznego. Spróbujmy fizykalną interpretację przenieść na zależności „siła osiowa - wydłużenie". Po scałkowaniu po powierzchni przekroju F zachodzi

$$\sigma = E(t) * d\varepsilon \to N = F\varepsilon * dE(t) \to N = \frac{F}{l} \lambda * dE(t)$$

oraz

$$\varepsilon = E^{-1}(t) * d\sigma = \sigma * dE^{-1}(t) \to \frac{\lambda}{l} F = E^{-1}(t) * dN \to \lambda = \frac{l}{F} N * dE^{-1}(t)$$

Z tych wzajemnych relacji

$$\sigma = E(t) * d\varepsilon \to N = \frac{F}{l} E(t) * d\lambda$$

$$\varepsilon = E^{-1}(t) * d\sigma \rightarrow \lambda = \frac{l}{F} E^{-1}(t) * dN$$

wynika, iż są one wzajemnymi rozwiązaniami relacji siła osiowa-wydłużenie.